

Θέμα 1 (1M) Να αποδείξετε ότι αν ένα αντικείμενο βρίσκεται σε κατάσταση μεταφορικής ισορροπίας και αν η ολική ροπή ως προς κάποιο σημείο είναι μηδενική, τότε η ροπή του σώματος είναι μηδενική ως προς οποιοδήποτε σημείο. Να κάνετε σχήμα στο οποίο να δείχνετε τα μεγέθη που θα χρησιμοποιήσετε στην απόδειξη.

(Η απόδειξη βρίσκεται στο διδακτικό βιβλίο)

Θέμα 2 (1M) Σε ένα τρισσορθόγωνιο σύστημα αξόνων x, y, z , με μοναδιαία διανύσματα στους άξονες $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ αντίστοιχα, μια δύναμη: $\mathbf{F} = (6\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \text{ N}$, δρα σε ένα σώματιο που υφίσταται μετατόπιση $\mathbf{s} = (3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \text{ m}$. Να υπολογίσετε:

- το έργο που παράγει η δύναμη στο σώματιο και
- τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{s}$

Από τον ορισμό του έργου σταθερής δύναμης έχουμε

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = (6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 18 - 2 + 0 = 16 \text{ J}$$

Για τον υπολογισμό της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων δύναμης-μετατόπισης εφαρμόζουμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Έχουμε

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos(\theta_{F,s}) \Rightarrow$$

$$\cos(\theta_{F,s}) = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{F}| |\mathbf{s}|} = \frac{18 \text{ J}}{\sqrt{40} \sqrt{10} \text{ J}} = \frac{18}{20} = 0.9 \Rightarrow$$

$$\theta_{F,s} = \cos^{-1}(0.9) \approx 0.451 \text{ rad} = \left(\frac{0.451 \times 180}{\pi} \right)^\circ = 25.84^\circ$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε $|\mathbf{F}| = \sqrt{6^2 + 2^2} \text{ N} = \sqrt{40} \text{ N}$ και $|\mathbf{s}| = \sqrt{3^2 + 1^2} \text{ m} = \sqrt{10} \text{ m}$.

Θέμα 3 (1M) Το μόριο του Οξυγόνου (O_2) (Ατομικό Βάρος: 16) περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z , που είναι κάθετος στο επίπεδο xy και διέρχεται από το μέσο της γραμμής που ενώνει τα δύο άτομα. Σε θερμοκρασία δωματίου, η μέση απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων είναι $1,21 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (θεωρούμε ότι τα άτομα είναι σημεία στο χώρο). Να υπολογίσετε:

- τη ροπή αδράνειας του μορίου ως προς τον άξονα z
- την κινητική ενέργεια περιστροφής, αν γνωρίζετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του μορίου γύρω από τον άξονα z είναι $2,0 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$ (Υπόδειξη: Σε μάζα ίση με το AB ενός συστατικού σε γραμμάριο περιέχονται $N = 6.022 \times 10^{23}$ σωματίδια του συστατικού.)

α) Η μάζα ενός ατόμου οξυγόνου είναι, $m_o = \frac{16 \text{ g}}{6.022 \times 10^{23}} \approx 2.66 \times 10^{-23} \text{ g} = 2.66 \times 10^{-26} \text{ kg}$

Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας έχουμε,

$$I = \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = \left(m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 + m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 \right) \\ = 2.66 \times 10^{-26} \times 3.66 \times 10^{-21} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 = 9.33 \times 10^{-47} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

β) $K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 9.33 \times 10^{-47} (2 \times 10^{12})^2 \text{ J} \approx 1.95 \times 10^{-22} \text{ J}$

Θέμα 4 (2Μ) Ένα ελατήριο με αμελητέα μάζα έχει σταθερά $k = 1600 \text{ Nm}^{-1}$.

α) Πόσο θα πρέπει να συμπιεστεί από το φυσικό του μήκος ώστε η αποθηκευμένη δυναμική του ενέργεια να είναι 3.20 J ;

β) Πόσο θα πρέπει να εκταθεί ώστε να έχει την ίδια δυναμική ενέργεια;

γ) Τοποθετούμε το ελατήριο με το ένα άκρο του στερεωμένο κάθετα στο επίπεδο. Υπολογίστε τη μέγιστο μήκος συμπίεσης όταν στο ελεύθερο άκρο του πέσει μάζα 1.20 Kgr από ύψος 0.80 m πάνω από το ελεύθερο άκρο του.

Α) Έχουμε $U_{el} = \frac{1}{2}k(\delta x)^2$ όπου δx η μεταβολή του μήκους του ελατηρίου. Θέλουμε

$$U_{el} = 3.20 \text{ J} \Rightarrow \frac{1}{2}k(\delta x)^2 = 3.20 \text{ J} \Rightarrow \delta x = \pm \sqrt{\frac{2 \times 3.20 \text{ J}}{1600 \text{ Nm}^{-1}}} \approx \pm 0.063 \text{ m}$$

Εφόσον ενδιαφερόμαστε για την συμπίεση του ελατηρίου η αποδεκτή λύση είναι $\delta x \approx -0.063 \text{ m}$

Β) Προφανώς για την έκταση έχουμε $\delta x \approx 0.063 \text{ m}$.

Γ) Θεωρώντας ότι το οριζόντιο επίπεδο στο ύψος του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου ως το επίπεδο μηδενικής δυναμικής βαρυτικής ενέργειας η δυναμική ενέργεια της μάζας πριν την ελεύθερη πτώση είναι $U_0 = mgh$. Όλη αυτή η ενέργεια κατά την πτώση του σώματος μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια και μετά την επαφή με το ελατήριο σε ελαστική ενέργεια του ελατηρίου και κινητική ενέργεια της μάζας. Όταν η ταχύτητα του σώματος μηδενιστεί το ελατήριο είναι στη μέγιστη συμπίεση, έστω δ , και όλη η ενέργεια είναι πλέον ελαστική και δυναμική της μάζας καθώς είναι χαμηλότερα από το σημείο που θεωρήσαμε ως επίπεδο μηδενικού βαρυτικού δυναμικού. Έχουμε δηλ.

$$U_0 = U_{el} + U_B = \frac{1}{2}k\delta^2 - mg\delta \Rightarrow$$

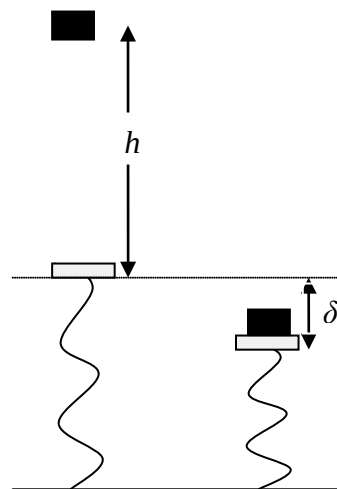
$$\frac{1}{2}k\delta^2 - mg\delta - U_0 = 0$$

Λύνουμε τη δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς δ και έχουμε

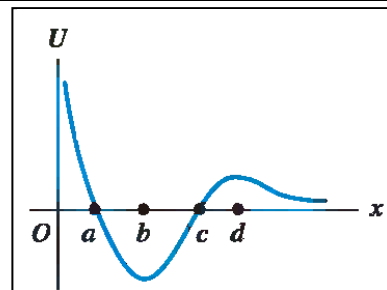
$$\delta = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kU_0}}{k} = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 + 2kmgh}}{k}$$
$$= \frac{mg}{k} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2h \frac{k}{mg}} \right) = \frac{12}{1600} \left(1 \pm \sqrt{1 + 2 \times 0.8 \frac{1600}{12}} \right)$$

$$\approx 0.117 \text{ m}$$

. Δηλαδή η μέγιστη συμπίεση του ελατηρίου είναι $11,7 \text{ cm}$.



Θέμα 5 (1Μ) Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η δυναμική ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του x -άξονα. Σε ποια από τα σημεία που επισημαίνονται στον άξονα x η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι α) μηδενική, β) προς τη θετική διεύθυνση, και γ) προς την αρνητική διεύθυνση. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Γνωρίζουμε ότι $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Συνεπώς α) η δύναμη είναι μηδενική

εκεί που η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει ακρότατα. Δηλ. στα σημεία b και d του διαγράμματος.

β) η παράγωγος (κλίση) της δυναμικής ενέργειας είναι αρνητική για $0 < x < b$ και για $x > d$ και θετική όταν $b < x < d$. Συνεπώς από τη σχέση $F_x = -dU/dx$ προκύπτει ότι $F_x < 0$ όταν $b < x < d$ δηλαδή η συνισταμένη δύναμη είναι στη διεύθυνση της αρχής των αξόνων και $F_x > 0$ όταν $0 < x < b$ ή $x > d$

Θέμα 6 (1.5M) α) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας 2 kg σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $\mathbf{r} = (6\mathbf{i} + 5t\mathbf{j})\text{ m}$. Προσδιορίστε τη στροφορμή $\mathbf{L}$ του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

Γνωρίζουμε ότι η στροφορμή ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Η ορμή του σωματιδίου

είναι $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (10\mathbf{j})\text{ kg m s}^{-1}$. Έχουμε

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 5t & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = -(10\mathbf{k})\text{ kg m}^2\text{ s}^{-1}. \text{ Για τη συγκεκριμένη κίνηση η στροφορμή δεν εξαρτάται}$$

από το χρόνο, έχει σταθερό μέτρο και διεύθυνση κατά τα αρνητικά του άξονα z .

Θέμα 7 (2.0M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m_1 = 950\text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_1 = ((3-t)\mathbf{i} + 9t\mathbf{j})\text{ m}$ και ενός άλλου μάζας $m_2 = 450\text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_2 = (2t\mathbf{i} + 9t^2\mathbf{j})\text{ m}$. Και τα δύο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους τη χρονική στιγμή $t = 0\text{ s}$. Υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο θα συγκρουστούν. Μετά από τη σύγκρουση τα δύο οχήματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί. Υπολογίστε την κοινή τους ταχύτητα.

Τα σώματα συγκρούονται όταν οι θέσεις τους ταυτίζονται, δηλ. πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \Rightarrow \begin{cases} 3-t = 2t \\ 9t = 9t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \text{ ή } t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 1\text{ s}$$

Η χρονική εξέλιξη των ταχυτήτων των σωματιδίων όπως υπολογίζονται από τη σχέση $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ είναι: $\mathbf{v}_1 = (-\mathbf{i} + 9\mathbf{j})\text{ m/s}$ και $\mathbf{v}_2 = (2\mathbf{i} + 18t\mathbf{j})\text{ m/s}$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωματιδίων έχουμε $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$.

Εφαρμόζοντας για $t = 1\text{ s}$ παίρνουμε

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_f \Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{950}{1400} (-\mathbf{i} + 9\mathbf{j}) \text{ m/s} + \frac{450}{1400} (2\mathbf{i} + 18\mathbf{j}) \text{ m/s} = \left(-\frac{5}{140} \mathbf{i} + 9 \frac{185}{140} \mathbf{j} \right) \text{ m/s}$$

Θέμα 8 (1Μ) Μια πλαστική σφαίρα επιπλέει στο νερό με το 50% του όγκου της βυθισμένο. Η ίδια σφαίρα σε γλυκερίνη επιπλέει με το 40% του όγκου της βυθισμένο. Υπολογίστε τις πυκνότητες του πλαστικού και της γλυκερίνης. ($\rho_{\text{νερού}} = 1 \text{ gr/cm}^3$).

Έστω V_s ο όγκος m_s η μάζα και $\rho_s = m_s / V_s$ η πυκνότητα της πλαστικής σφαίρας.

Και στις δύο περιπτώσεις το σώμα επιπλέει όποτε το βάρος του εξισορροπείται από τη δύναμη της άνωσης.

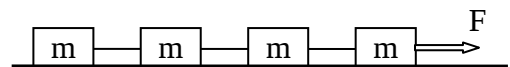
Για το πείραμα στο νερό: $m_s g = \underbrace{0.5 V_s \rho_{H_2O}}_{m_{H_2O}} g$

Για το πείραμα στη γλυκερίνη: $m_s g = \underbrace{0.4 V_s \rho_{gl}}_{m_{gl}} g$

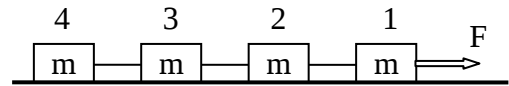
Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $m_s g = 0.5 V_s \rho_{H_2O} g \Rightarrow \frac{m_s}{V_s} = 0.5 \rho_{H_2O} \Rightarrow \rho_s = 0.5 \rho_{H_2O}$

Από τη δεύτερη σχέση: $m_s g = 0.4 V_s \rho_{gl} g \Rightarrow \rho_{gl} = \frac{m_s}{0.4 V_s} = 2.5 \rho_s = 2.5 \times 0.5 \rho_{H_2O} = 1.25 \rho_{H_2O}$

Διάρκεια 2,5 ώρες
-- Καλή Επιτυχία --



1. (2M) Το σύστημα των 4 μαζών κινείται σε λείο επίπεδο υπό την επίδραση σταθερής δύναμης. Υπολογίστε την επιτάχυνση κάθε μιας από τις μάζες καθώς και την οριζόντια δύναμη που ασκείται σε κάθε μια από αυτές. Επαναλάβετε τους υπολογισμούς στην περίπτωση που ο συντελεστής τριβής (ολίσθησης) μεταξύ του κάθε σώματος και του επιπέδου είναι μ .



(Α, μηδενική τριβή)

Η εξωτερική δύναμη προκαλεί την κίνηση στο **σύστημα** των 4 σωματιδίων. Οπότε η **κοινή** (ίδια για όλες τις μάζες) επιτάχυνση του συστήματος θα είναι $a = F / 4m$ στην κατεύθυνση της F .

Στη μάζα (1) ασκούνται η δύναμη F και η τάση $-T_{12}$ του νήματος που τη συνδέει με τη μάζα 2.

Δεδομένου ότι μάζα κινείται με επιτάχυνση a έχουμε: $ma = F - T_{12} \Rightarrow T_{12} = F - mF / 4m = 3F / 4$.

Στη μάζα 2 ασκούνται οι τάσεις T_{12} και $-T_{23}$ οπότε

$ma = T_{12} - T_{23} \Rightarrow T_{23} = T_{12} - mF / 4m = 3F / 4 - F / 4 = 2F / 4$. Παρομοίως για την τάση του νήματος που συνδέει τις μάζες 3 και 4 έχουμε $T_{34} = F / 4$ η οποία είναι ίση με τη δύναμη που ασκείται στην μάζα 4. **Συνεπώς η συνισταμένη δύναμη σε κάθε μάζα είναι ίση με $F / 4$.**

Παρατηρούμε εδώ ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, **η συνισταμένη δύναμη σε κάθε μάζα είναι η ίδια** αλλά οι τάσεις των νημάτων που συνδέουν τις μάζες είναι διαφορετικές.

(Β, με τριβή)

Η δύναμη της τριβής είναι η ίδια, $-\mu mg$, σε κάθε σώμα καθώς όλα έχουν το ίδιο βάρος. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε $4ma' = F - 4\mu mg \Rightarrow a' = F / 4m - \mu g$ όπου a' η κοινή επιτάχυνση των τεσσάρων μαζών. Κατά αναλογία με την περίπτωση Α έχουμε ότι η δύναμη που ασκείται σε κάθε μάζα είναι $F' = ma' = F / 4 - \mu mg$

2. (4M) Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο χώρο υπό την επίδραση της βαρύτητας και άλλων δυνάμενων με διάνυσμα θέσης: $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + (3 + 4t)\mathbf{j} - (2t - t^2)\mathbf{k}$. (Οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.)

(α) Ποια είναι η απόσταση του κινητού μετά $3s$ από την αρχή των αξόνων και ποια από το σημείο εκκίνησης του ($t = 0s$). (0.5M)

(β) Ποια η κινητική ενέργεια του σωματιδίου όταν $t = 3s$; (0.5M)

(γ) Ποια είναι η συνολική δύναμη που προκαλεί αυτού του είδους την κίνηση; Εξαρτάται από το χρόνο; (1M)

(δ) Ποιο είναι το έργο της βαρυτικής δύναμης κατά την κίνηση του σωματιδίου από $t = 1s$ έως $t = 3s$ (Υποθέστε ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι κατά την αρνητική διεύθυνση του άξονα z); (0.5M)

(ε) Υπολογίστε τη στροφορμή (ως συνάρτηση του χρόνου) του σωματιδίου γύρω από την αρχή των αξόνων. (1M)

(ζ) Ποια η ροπή της δύναμης της βαρύτητας όταν $t = 3s$; (0.5M)

(α) η ζητούμενη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι $|\mathbf{r}(3s)| = \sqrt{2^2 + 15^2 + 3^2} \text{ m} = \sqrt{238} \text{ m}$

και η απόσταση από το σημείο εκκίνησης θα υπολογιστεί από το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{r}(t = 3s) - \mathbf{r}(t = 0s) = 2\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + 3\mathbf{k} - (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = 12\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Έχουμε $|\mathbf{r}(t = 3s) - \mathbf{r}(t = 0s)| = \sqrt{12^2 + 3^2} \text{ m}$.

(β) Για το υπολογισμό της Κ.Ε. χρειαζόμαστε την ταχύτητα του σώματος όταν $t = 3s$. Έχουμε

$\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r} / dt = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (2 - 2t)\mathbf{k}$ και $\mathbf{v}(3s) = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k} (m/s)$ οπότε

$v(t = 3s) = \sqrt{4^2 + 4^2} m/s = 4\sqrt{2} m/s$.

Τελικά τη χρονική στιγμή $t = 3s$ έχουμε $K = 1/2 mv^2 = 16m(J)$. Οι μονάδες θα είναι σε Joule εφόσον η μάζα δίνεται σε Kg.

(γ) Έχουμε $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m d\mathbf{v} / dt = 2m\mathbf{k}$. Προφανώς η συνολική δύναμη δεν εξαρτάται από το χρόνο.

(δ) Το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι $W = mgz_{t=3s} - mgz_{t=1s}$ όπου $z_{t=3s}$ το ύψος (z -συνιστώσα της θέσης του κινητού όταν $t = 3s$). Από το διάνυσμα θέσης έχουμε $z_{t=3s} = 3\text{ m}$ και $z_{t=1s} = -1\text{ m}$, οπότε $W = mg(3 - (-1)) = 4mg (J)$.

$$\begin{aligned}
 \text{(ε)} \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3-4t & -2t+t^2 \\ 0 & 4 & -2+2t \end{vmatrix} \\
 &= m \left[(3-4t)(-2+2t) + 4(-2t+t^2) \right] \mathbf{i} - m2(-2+2t) \mathbf{j} + 8m\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

(ζ) Η δύναμη της βαρύτητας είναι $\mathbf{B} = -mg\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}(t=3s) = 2\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Οπότε

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}(3s) \times \mathbf{B} = (2\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \times (-mg\mathbf{k}) = mg \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 15 & 3 \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} = -15mg\mathbf{i} + 2mg\mathbf{j}.$$

3. (1.0M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m_1=200\text{kg}$ είναι $\mathbf{r}_1 = (-2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j})\text{m}$ και ενός άλλου μάζας $m_2=50\text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_2 = ((t^2 - 3t)\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j})\text{m}$. Και τα δύο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους τη χρονική στιγμή $t=0\text{s}$ και συγκρούονται όταν $t=1\text{s}$. Μετά από τη σύγκρουση τα δύο οχήματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί. Υπολογίστε την κοινή τους ταχύτητα (μέτρο και διεύθυνση).

Η αρχή διατήρησης της ορμής επιβάλλει:

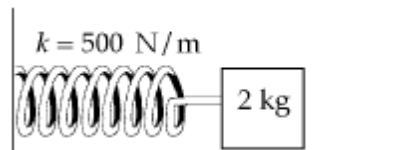
$$(m_1 + m_2)\mathbf{v}_f(t=1s) = m_1\mathbf{v}_1(1s) + m_2\mathbf{v}_2(t=1s)$$

Οι ταχύτητες των σωματιδίων ως συνάρτηση του χρόνου υπολογίζονται μέσω της $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ και είναι $\mathbf{v}_1 = (0\mathbf{i} + 2t\mathbf{j})\text{m/s}$ και $\mathbf{v}_2 = ((2t - 3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j})\text{m/s}$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_f(t=1s) &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} 2\mathbf{j} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (-1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \\
 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{i} + 2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) \mathbf{j} \\
 &= -\frac{1}{5} \mathbf{i} + 2\mathbf{j}
 \end{aligned}$$

Με μέτρο $v_f = \sqrt{(1/5)^2 + 2^2} \text{ (ms}^{-1}\text{)}$

4. (2M) Μια μάζα 2kg συνδέεται με ιδανικό ελατήριο σταθεράς 500N/m. Η μάζα μετατοπίζεται 5cm προς τα δεξιά και αφήνεται ελεύθερη. Υπολογίστε την ταχύτητα της τη στιγμή που διέρχεται από την αρχική θέση ισορροπίας α) αν το επίπεδο είναι λείο και β) αν ο συντελεστής τριβής είναι $\mu = 0.35$. Υπολογίστε, στη δεύτερη περίπτωση, την ενέργεια που μετατράπηκε σε θερμότητα.



Η ελαστική ενέργεια του ελατηρίου στην εκτεταμένη θέση είναι

$$U_{el} = 1/2 kx^2 = 1/2 \times 500 \text{ (N/m)} \times (5 \times 10^{-2} \text{ m})^2 = 0.625 \text{ J}.$$

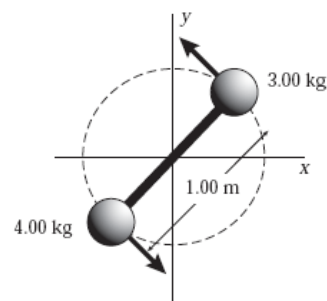
Α) Όταν δεν υπάρχουν τριβές όλη η ελαστική έχει μετατραπεί σε κινητική όταν το ελατήριο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του. Οπότε $1/2 mv^2 = U_{el} \Rightarrow v = \sqrt{0.625} \text{ m/s}$

Β) Όταν υπάρχει τριβή ένα μέρος της ελαστικής ενέργειας καταναλώνεται για να υπερνικήσει την τριβή (έργο λόγω τριβής) και το υπόλοιπο γίνεται κινητική ενέργεια. Το έργο της δύναμης της τριβής για την κίνηση των 5 cm είναι $W_\mu = \mu mgs = 0.35 \times 2 \times 10 \times 0.05 \text{ J} = 0.35 \text{ J}$. Από την αρχή διατήρησης της ενέργειας όταν το κινητό περνά από το σημείο ισορροπίας:

$$K = U_{el} - W_\mu \Rightarrow 1/2 mv^2 = 0.625 \text{ J} - 0.35 \text{ J} \Rightarrow v = \sqrt{0.275} \text{ m/s}$$

Ένα μέρος δηλαδή της αρχικής ελαστικής ενέργειας μετατρέπεται σε ΚΕ καθώς το υπόλοιπο έχει μετατραπεί σε θερμότητα εξαιτίας της τριβής.

5. (1.5M) Το περιστρεφόμενο σύστημα των δύο μαζών της διπλανής εικόνας συνδέονται με αβαρή άκαμπτη ράβδο. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια και τη στροφορμή (μέτρο και διεύθυνση) του συστήματος όταν η (γραμμική) ταχύτητα των μαζών είναι 5m/s. Πόσο θα μεταβληθούν οι δύο ποσότητες αν διπλασιαστεί το μήκος της ράβδου αλλά συνεχίσει να κινείται με τις ίδια γραμμική ταχύτητα;



Α) Η κινητική ενέργεια είναι $K = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{7}{2} \times 5^2 \text{ J} = 87.5 \text{ J}$

(στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα καταλήγουμε και μέσω της $K = 1/2 I_{tot} \omega^2$, με I_{tot} τη ροπή αδράνειας του συστήματος και ω τη γωνιακή ταχύτητα)

Β) η στροφορμή $\mathbf{L} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2 = m_1 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1) + m_2 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2)$.

Δεδομένου ότι για την κίνηση του προβλήματος τα διανύσματα της θέσης και της ταχύτητας είναι κάθετα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= m_1 (r_1 v_1) \mathbf{k} + m_2 (r_2 v_2) \mathbf{k} \\ &= (3\text{Kg} \times 0.5\text{m} \times 5\text{m/s} + 4\text{Kg} \times 0.5\text{m} \times 5\text{m/s}) \mathbf{k} \\ &= 17.5 \mathbf{k} \text{ (Kg m}^2 \text{ s)}\end{aligned}$$

Όπου $r_1 = r_2 = l/2$. Αν διπλασιαστεί το μήκος της ράβδου ($l \rightarrow 2l$) και η ταχύτητα περιστροφής παραμείνει η ίδια τότε η ΚΕ δεν θα αλλάξει αλλά η στροφορμή θα διπλασιαστεί.

1. (2M) Ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο με διάνυσμα θέσης: $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} + (3 + 4t)\mathbf{j} - (3 + 2t - t^2)\mathbf{k}$.

Οι αποστάσεις είναι σε μέτρα και ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

(α) Ποια είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και ποιο το μέτρο της όταν $t = 0s$ και $t = +3s$; (0.5M)

(β) Ποια είναι το διάνυσμα της επιτάχυνσης και ποιο το μέτρο της όταν $t = 0s$ και $t = +3s$; (0.5M)

(γ) Ποια είναι η απόσταση του κινητού μετά 3s από την αρχή των αξόνων και ποια από το σημείο εκκίνησης του ($t = 0s$). (0.5M)

(δ) Σχεδιάστε σε ένα πρόχειρο διάγραμμα τη μεταβολή της z συνιστώσας της θέσης για $0s < t < 4s$. (0.5M)

(α) Έχουμε $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - (2 - 2t)\mathbf{k}$ και $|\mathbf{v}(t)| = \left(\sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2(1-t)^2} \right) m/s = \left(2\sqrt{4 + (1-t)^2} \right) m/s$

Για $t = 0 \rightarrow \mathbf{v}(0) = 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ και $|\mathbf{v}(0)| = 2\sqrt{5} m/s$

Για $t = 3s \rightarrow \mathbf{v}(3) = 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ και $|\mathbf{v}(3)| = 2\sqrt{8} m/s$

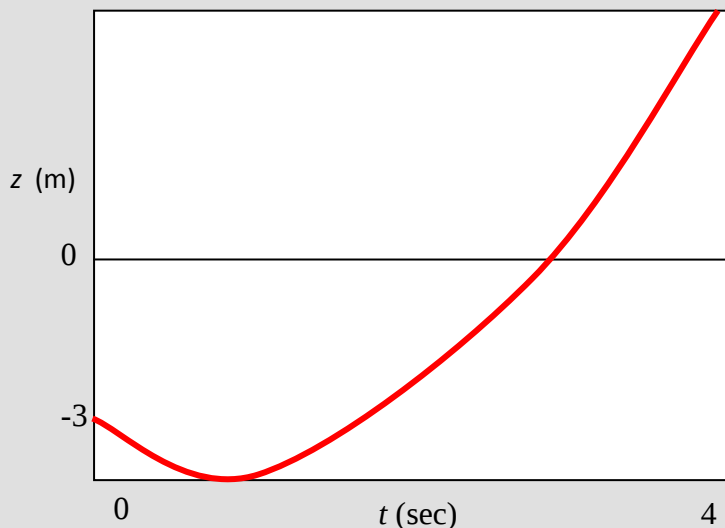
(β) Έχουμε $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 2\mathbf{k} = 2\mathbf{k}$ και $|\mathbf{a}(t)| = \left(\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} \right) m/s^2 = 2 m/s^2$ που είναι ανεξάρτητα του χρόνου

(γ) Η απόσταση του κινητού από την αρχή των αξόνων είναι $|\mathbf{r}(t = 3s)| = \sqrt{6^2 + 15^2 + 0^2} m = \sqrt{261} m$. Η απόστασή από το σημείο εκκίνησης είναι:

$$|\mathbf{r}(t = 3s) - \mathbf{r}(t = 0s)| = |(6\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 0\mathbf{k}) - (6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k})| = \sqrt{0^2 + 12^2 + 3^2} m = \sqrt{153} m$$

(δ) Έχουμε $z(t) = -(3 + 2t - t^2)$

t (sec)	z (m)
0	-3
1	-4
2	-3
3	0
4	5



2. (1.5M) Σε ένα σώμα που υφίσταται μετατόπιση $\mathbf{s} = 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, εκτός άλλων δυνάμεων, δρα και η δύναμη $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Οι αποστάσεις είναι σε cm και η δύναμη σε N. Να υπολογίσετε:

α) το έργο (σε Joule) που παράγει η δύναμη στο σωματίο και (0.75M)

β) τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{F}$ και $\mathbf{s}$. (0.75M)

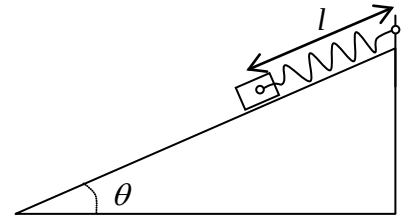
α) $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = -24 \text{ cm N} = -0.24 \text{ m N} = -0.24 \text{ Joule}$

β) $\mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{F}| |\mathbf{s}|} = \frac{-24 \text{ cm N}}{(\sqrt{20} \text{ N})(\sqrt{45} \text{ cm})} = -0.8$ οπότε $\theta = \cos^{-1}(-0.8) \approx 143.13^\circ$.

3. (1.5M) Σώμα μάζας M είναι συνδεδεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς k_{el} με φυσικό μήκος l_0 και βρίσκεται σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας θ .

α) Αν αγνοήσουμε το συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και του επιπέδου να υπολογίσετε το μήκος, l , του ελατηρίου στην ισορροπία. (0.5M)

β) Αν ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι 0.1 υπολογίστε πόσο μπορούμε να επιμηκύνουμε το ελατήριο και το σώμα να παραμένει ακίνητο στο επίπεδο. (1M)



α) Στο διπλανό σχήμα σχεδιάζονται οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα. Στην ισορροπία, απουσία δυνάμεων τριβής ($\mathbf{F}_{\tau\phi} = 0$) έχουμε:

$$k_{el}(l - l_0) = Mg \sin \theta \Rightarrow l = l_0 + \frac{Mg}{k_{el}} \sin \theta$$

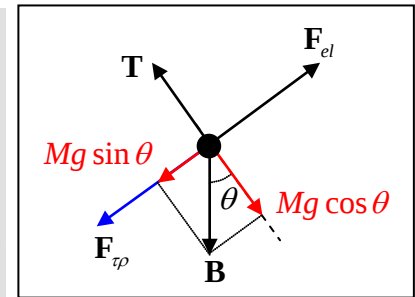
β) Έστω ότι επιμηκύνουμε το ελατήριο ώστε να έχει μήκος l_1 . Προκειμένου το σώμα να παραμένει ακίνητο θα πρέπει

$$k_{el}(l_1 - l_0) \leq Mg \sin \theta + \eta T \Rightarrow l_1 \leq l_0 + \frac{Mg \sin \theta + \eta T}{k_{el}}$$

Έχουμε όμως ότι $T = Mg \cos \theta$ οπότε

$$l_1 \leq l_0 + \frac{Mg \sin \theta + \eta Mg \cos \theta}{k_{el}} \Rightarrow l_1 \leq l_0 + \frac{Mg}{k_{el}} (\sin \theta + \eta \cos \theta)$$

Η ισότητα στην προηγούμενη ανισότητα μας δίνει τη μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου. Επιμήκυνση πέρα από αυτό το μήκος θα προκαλέσει κίνηση του σώματος καθώς η έλξη του ελατηρίου θα υπερβεί τη συνιστώσα του βάρους και τη στατική τριβή.



4. (1M) Το μόριο του Οξυγόνου(O_2) ($m_o = 1.66 \times 10^{-23} \text{ gr}$) περιστρέφεται στο επίπεδο xy γύρω από τον άξονα z , που είναι κάθετος στο επίπεδο xy και διέρχεται από το μέσο της γραμμής που ενώνει τα δύο άτομα. Η απόσταση μεταξύ των δύο ατόμων είναι $1.21 \times 10^{-10} \text{ m}$ (θεωρούμε ότι τα άτομα είναι σημεία στο χώρο).

Να υπολογίσετε:

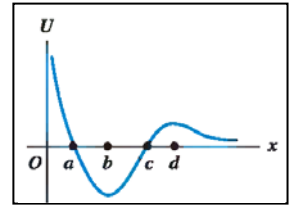
α) τη ροπή αδράνειας του μορίου ως προς τον άξονα z και **β)** την κινητική ενέργεια περιστροφής, αν γνωρίζετε ότι η γωνιακή ταχύτητα του μορίου γύρω από τον άξονα z είναι $2.0 \times 10^{12} \text{ rad/s}$

α) Από τον ορισμό της ροπής αδράνειας έχουμε,

$$I = \sum_{i=1}^2 m_i r_i^2 = \left(m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 + m_o \left(\frac{1.21 \times 10^{-10} \text{ m}}{2} \right)^2 \right) \\ = 2 \times 1.66 \times 10^{-26} \times 3.66 \times 10^{-21} \text{ Kgr} \times \text{m}^2 \approx 1.2 \times 10^{-46} \text{ Kgr} \times \text{m}^2$$

β) $K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 1.2 \times 10^{-46} (2 \times 10^{12})^2 \text{ J} \approx 2.4 \times 10^{-22} \text{ J}$

5. (1M) Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η δυναμική ενέργεια $U(x)$ ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος του x -άξονα. Σε ποια από τα σημεία που επισημαίνονται στον άξονα x η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι α) μηδενική, β) προς τη θετική διεύθυνση, και γ) προς την αρνητική διεύθυνση. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.



Γνωρίζουμε ότι $F_x = -\frac{dU}{dx}$. Συνεπώς α) η δύναμη είναι μηδενική εκεί που η

συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας παρουσιάζει ακρότατα. Δηλ. στα σημεία b και d του διαγράμματος.

β) η παράγωγος (κλίση) της δυναμικής ενέργειας είναι αρνητική για $0 < x < b$ και για $x > d$ και θετική όταν $b < x < d$. Συνεπώς από τη σχέση $F_x = -dU/dx$ προκύπτει ότι $F_x < 0$ όταν $b < x < d$ δηλαδή η συνισταμένη δύναμη είναι στη διεύθυνση της αρχής των αξόνων και $F_x > 0$ όταν $0 < x < b$ ή $x > d$

6. (1.5M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας 2 kg σε συνάρτηση με το χρόνο είναι $\mathbf{r} = (2t^2 \mathbf{i} + 5t \mathbf{j})$. Προσδιορίστε τη στροφορμή $\mathbf{L}$ (μέτρο και διεύθυνση) του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

Γνωρίζουμε ότι η στροφορμή ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Η ορμή του σωματιδίου

είναι $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2(4t\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \text{ kg m s}^{-1}$. Έχουμε

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t^2 & 5t & 0 \\ 8t & 5 & 0 \end{vmatrix} = -((10t^2 - 40t^2)\mathbf{k}) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = (30t^2\mathbf{k}) \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}. \text{ Για τη συγκεκριμένη}$$

κίνηση η στροφορμή έχει μεταβλητό μέτρο με το χρόνο και σταθερή διεύθυνση κατά τα θετικά του άξονα z .

7. (2.0M) Το διάνυσμα θέσης ενός σώματος μάζας $m_1 = 200 \text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_1 = (-2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}) \text{ m}$ και ενός άλλου μάζας $m_2 = 50 \text{ kg}$ είναι $\mathbf{r}_2 = ((t^2 - 3t)\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j}) \text{ m}$. Και τα δύο σώματα ξεκινούν την κίνησή τους τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$. Υπολογίστε μετά από πόσο χρόνο θα συγκρουστούν. Μετά από τη σύγκρουση τα δύο οχήματα συσσωματώνονται και κινούνται μαζί. Υπολογίστε την κοινή τους ταχύτητα.

Τα σώματα συγκρούονται όταν οι θέσεις τους ταυτίζονται, δηλ. πρέπει να ισχύει:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 3t = -2 \\ 2t - 1 = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ s ή } t = 2 \text{ s} \\ t = 1 \text{ s} \end{cases} \Rightarrow t = 1 \text{ s}$$

Η χρονική εξέλιξη των ταχυτήτων των σωματιδίων όπως υπολογίζονται από τη σχέση $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ είναι: $\mathbf{v}_1 = (-0\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}) \text{ m/s}$ και $\mathbf{v}_2 = ((2t - 3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m/s}$

Από την αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των δύο σωματιδίων έχουμε $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$.

Εφαρμόζοντας για $t = 1\text{s}$ παίρνουμε

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_f \Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_f = \frac{200}{250}(-0\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m/s} + \frac{50}{250}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \text{ m/s} = \left(-\frac{50}{250}\mathbf{i} + \frac{500}{250}\mathbf{j}\right) \text{ m/s} = \left(-\frac{1}{5}\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\right) \text{ m/s}$$